MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS

-= KÖZÉP SZINT =-

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$3\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ **(2 pont)**

Megoldás:

Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát 3-mal! $\Rightarrow$ $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (1 pont)

Innen $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ (1 pont)

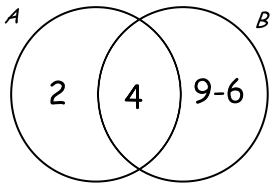
(A megoldás csak radiánban fogadható el a feladat megfogalmazása miatt!)

Összesen: 2 pont

2) Tudjuk, hogy $|A \cap B| = 4$, $|A \setminus B| = 2$ és $|A \cup B| = 9$. Mennyi $|A|$ és $|B|$, ahol $|A|$ és $|B|$ az adott halmaz számosságát jelöli? **(3 pont)**

Megoldás:

Jelöljük Venn-diagramon a halmazok számosságát! (2 pont)



$\Rightarrow$ Leolvashatjuk a megoldást: $|A| = 6$ és $|B| = 7$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

3) Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x}}}$ **(3 pont)**

Megoldás:

Belülről kifelé haladva, először az x^2-t, majd az x-et visszük be a gyök alá.
A gyök- és hatványazonosságokat használva, a gyökkitevőket összeszorozzuk, a hatványkitevőket pedig összeadjuk.

$\Rightarrow \sqrt{x\sqrt[3\cdot4]{x\cdot\left(x^2\right)^4}} = \sqrt{x\sqrt[12]{x^9}} = \sqrt[12\cdot2]{x^{12}\cdot x^9} = \sqrt[24]{x^{21}}$ (2 pont)

Egyszerűbb alakra hozva: $\sqrt[8]{x^7}$ vagy $x^{\frac{7}{8}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

4) Egy derékszögű trapéz középvonala 7 cm, rövidebbik szára pedig 5 cm. Mekkora a trapéz területe? (2 pont)

Megoldás:

A trapéz középvonala (k) egyenlő az alapok $(a;c)$ számtani közepével $\Rightarrow \frac{a+c}{2} = k = 7$ cm (1 pont)

A derékszögű trapéz rövidebbik szára pedig egyenlő a magassággal.

Ezek alapján $T = \frac{a+c}{2} \cdot m = 7 \cdot 5 = \mathbf{35\ cm^2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$|x-2| > 4$ **(3 pont)**

Megoldás:

Az abszolút érték elhagyásával két esetet vizsgálunk:

I. ha $x-2>0 \Rightarrow x>2$, akkor $x-2>4 \Rightarrow x>6$ (1 pont)

II. ha $x-2 \le 0 \Rightarrow x \le 2$, akkor $-(x-2)>4 \Rightarrow -2>x$ (1 pont)

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $\boldsymbol{x < -2}$ **vagy** $\boldsymbol{x > 6}$ (1 pont)

(A feladat grafikus módon is megoldható.)

Összesen: 3 pont

6) Ha most éppen kedd délután 14^{00} óra van, akkor mi lesz 7355 perc múlva? (2 pont)

Megoldás:

Meg kell nézni, hogy a 7355 perc az hány nap, hány óra és hány perc!

1 nap = 24 óra = 1440 perc

7355 perc = 122 óra, 35 perc = 5 nap, 2 óra, 35 perc (1 pont)

Tehát, a kérdéses időpont **vasárnap 16 óra 35 perc**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Egy erdei sétány egyik oldalán fák sorakoznak, 5 méterenként található egy. Az út másik oldalán kukákat helyezett el az önkormányzat 18 méterenként. A sétány elején pont egyvonalban található egy fa és egy kuka. Hány méter múlva ismétlődik meg újra, hogy egymás mellett áll egy fa és egy szemetes? (2 pont)

Megoldás:

A két szám legkisebb közös többszörösét keressük, ehhez prímtényezők szorzatára bontjuk őket:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 5 \end{array}\right\} \Rightarrow [5;18] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$ (1 pont)

Legközelebb **90 m** múlva lesz egymással szemben fa és szemetes. (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Zolinak háromszor annyi pénze van, mint Bence pénze felének a kétharmada. Melyik állítás igaz? (2 pont)

a) Zolinak több pénze van, mint Bencének.

b) Ugyanannyi pénzük van.

c) Bencének több pénze van, mint Zolinak.

Megoldás:

Jelöljük Bence pénzét b-vel, ekkor Zoli pénze: $3 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6b}{6} = b$. (1 pont)

Tehát, a helyes válasz a **b)** állítás. (1 pont)

Összesen: 2 pont

9) Oldd meg az alábbi egyenletet!

$$\log_2 \log_5 (x + 4) = 0$$ **(3 pont)**

Megoldás:

Kikötést kell tennünk a logaritmus numerusára: $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$ (1 pont)

A logaritmus definíciója miatt $\Rightarrow$ $\log_5 (x+4) = 1$ (1 pont)

Ismét a logaritmus definíciója miatt $\Rightarrow$ $x + 4 = 5 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1}$, ami megfelel a kikötésnek. (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Egy konvex 77-szög összes átlóját meghúzzuk, majd közülük egyeseket pirosra színezünk.

a) Hány átlót húztunk meg? (1 pont)

b) Lehetséges-e, hogy a sokszög minden csúcsába pontosan 13 piros átló fut be? Válaszodat indokold! (1 pont)

Megoldás:

a) Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Tehát, $\frac{77 \cdot 74}{2} = \mathbf{2849}$ **átló** (1 pont)

b) **Nem lehetséges**, hiszen egy gráfban a csúcsok fokszáma mindig páros, és $77 \cdot 13 = 1001$, ami páratlan. (1 pont)

Összesen: 2 pont

11) Mely *a* illetve *b* értékek mellett áll fenn az alábbi egyenlőség?

$$2ab - 4a = 0$$ **(3 pont)**

Megoldás:

Ki tudjuk emelni a-t $\Rightarrow$ $a(2b - 4) = 0$ (1 pont)

Egy szorzat csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0:

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{a = 0}$ vagy (tartalmazza az *és* kapcsolatot is) (1 pont)

$\Rightarrow 2b - 4 = 0$, ahonnan $\boldsymbol{b = 2}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

12) Hányféle lyukasztás állítható be a buszjegy-lyukasztón, ha a szerkezet legalább 2, legfeljebb 4 számot lyukaszt ki a 9 közül? (3 pont)

Megoldás:

Ismétlés nélküli kombinációról beszélünk, tehát $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\mathbf{246}$ (3 pont)

Összesen: 3 pont

Maximális elérhető pontszám: 30

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13) **Egy vállalkozó három fodrászüzletet üzemeltetett. Fejlesztési terveihez pontos adatokra volt szüksége, ezért egy héten keresztül felmérte az egyes üzletek forgalmát a vendégek kora és neme szerinti megoszlásban. Az eredményt az alábbi táblázat mutatja:**

		1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet
Felnőttek	nők	116	88	102
	férfiak	98	64	72
Gyerekek	lányok	34	36	48
	fiúk	30	28	32

a) **A három üzlet teljes forgalmának hány százalékát teszik ki a nőnemű vendégek?** **(4 pont)**

b) **Szemléltesd oszlopdiagramon az egyes üzletek forgalmát nemek szerinti bontásban!** **(2 pont)**

c) **Számítsd ki az üzletek (összesített) átlagos forgalmát! (Az eredményt egész számra kerekítve add meg!)** **(2 pont)**

d) **Az 1. üzlet a hét egy napján, a 2. üzlet a hét három napján, a 3. üzlet a hét két napján műszaki okok miatt zárva tartott. Ezt tudva, melyik üzlet napi átlagos forgalma a legnagyobb?** **(4 pont)**

Megoldás:

a) Nőnemű vendégek összesen: $116+88+102+34+36+48=424$ (1 pont)

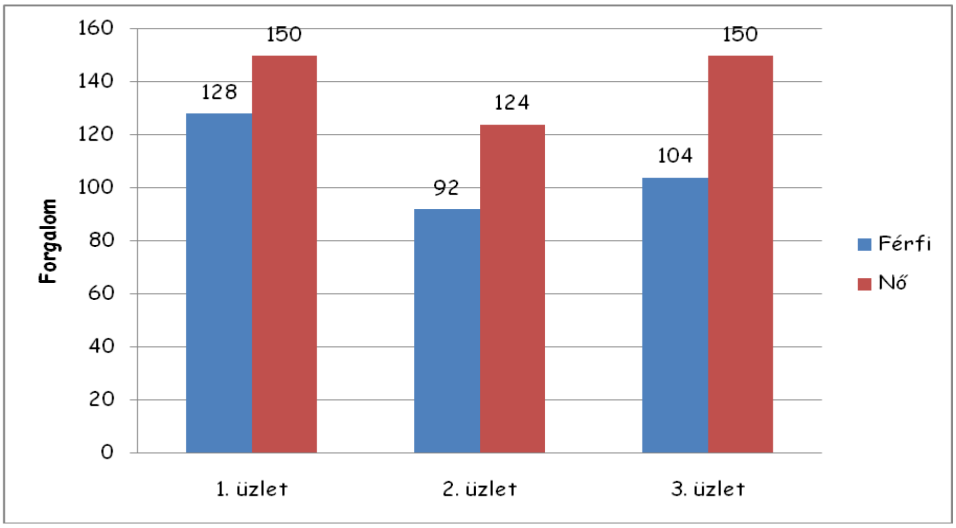
Összes vendég $\Rightarrow$ Táblázat sorainak összesítése $\Rightarrow 748$ (1 pont)

Fel tudjuk írni a keresett arányt $\Rightarrow \dfrac{424}{748}=0{,}5669=\mathbf{56{,}69\%}$ (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

b)

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet
Férfiak és fiúk	$98+30=128$	$64+28=92$	$72+32=104$
Nők és lányok	$116+34=150$	$88+36=124$	$102+48=150$



(2 pont)

c) $\overline{Y} = \frac{278 + 216 + 254}{3} \approx$ **249 fő** (1 pont)

A vállalkozó üzleteinek átlagos forgalma 249 fő. (1 pont)

d) 1. üzlet átlagos forgalma 6 napra oszlik meg: $\overline{Y_1} = \frac{278}{6} \approx 46\,\text{fő}$ (1 pont)

2. üzlet átlagos forgalma 4 napra oszlik meg: $\overline{Y_2} = \frac{216}{4} = 54\,\text{fő}$ (1 pont)

3. üzlet átlagos forgalma pedig 5 napra oszlik meg: $\overline{Y_3} = \frac{254}{5} \approx 50\,\text{fő}$ (1 pont)

A **második üzlet** átlagos napi forgalma volt a legnagyobb. (1 pont)

Összesen: 12 pont

14) Amikor Béla hazaért az egyetemről, az asztalon a következő levelet találta: „Kisfiam, légy szíves vegyél a pénzeden 45 db muskátli palántát, mert az itthon lévő 4000 Ft nem volt rá elég. Ha hazajöttem megadom! 45 palánta $= \overline{X25Y}$ Ft. Csók: Anyu."

a) Mennyibe kerül egy muskátli palánta? (6 pont)

b) Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy $\overline{X25Y}$ alakú négyjegyű számot, mennyi a valószínűsége, hogy e szám osztható 4-gyel? (6 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható. Ha $\overline{X25Y}$ osztható 5-tel, akkor 0-ra vagy 5-re végződik. (1 pont)

I. Ha $Y = 0$, akkor a számjegyek összege $5 + 2 + X$. Ennek az összegnek 9-cel oszthatónak kell lennie, ami csak akkor teljesül, ha $X = 2$. (1 pont)
Ekkor tehát a keresett szám a 2250, ami viszont nem lehetséges, mert ebben az esetben a 4000 Ft elegendő lett volna a vásárláshoz. (1 pont)

II. Ha $Y = 5$, akkor a számjegyek összege $5 + 5 + 2 + X$ és ez akkor lesz osztható 9-cel, ha $X = 6$. (1 pont)

Tehát, a keresett szám a 6255, innen egy palánta ára: $\frac{6255}{45} =$ **139 Ft.** (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

b) Az X értéke 9-féle lehet (0 nem lehet), míg az Y értéke 10-féle (0 is lehet). Összesen tehát 90 db $\overline{X25Y}$ alakú négyjegyű szám van. (1 pont)

Ezek közül azok és csak azok oszthatók 4-gyel, amelyek utolsó két jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel. A számban szereplő utolsó két jegy, tehát 52 vagy 56. (2 pont)

X-nek mindkét esetben 9 különböző értéke lehet, tehát az $\overline{X25Y}$ alakú négyjegyű számok között $2 \cdot 9 = 18$ db 4-gyel osztható van. (1 pont)

A keresett valószínűség tehát: $\frac{18}{90} =$ **0,2**. (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 12 pont

15) **Tekintsük az $x \mapsto -2x^2 + 8x + c$ valós számokon értelmezett függvényt! Határozza meg c értékét úgy, hogy…**

a) a függvény grafikonja érintse az x tengelyt! (4 pont)
b) a függvény maximuma 6 legyen! (3 pont)
c) az összes függvényérték pozitív legyen! (3 pont)
d) a $P(1;2)$ pont rajta legyen a parabolán! (2 pont)

Megoldás:

a) Egy másodfokú függvény akkor érinti az x-tengelyt, hogyha a diszkrimináns értéke 0. (1 pont)
$D = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 64 - 4 \cdot (-2) \cdot c = 0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{c = -8}$ (1 pont)
Szöveges válasz… (1 pont)

b) Alakítsuk át a parabola egyenletét teljes négyzetté, akkor látszanak a függvénytranszformációk: (1 pont)
$$-2x^2 + 8x + c = -2\left(x^2 - 4x - \frac{c}{2}\right) = -2\left[(x-2)^2 - 4 - \frac{c}{2}\right] = -2(x-2)^2 + 8 + c$$
Mindig a zárójelen kívüli konstans tag mutatja meg a függvény y–tengely menti eltolódását, vagyis a maximum értékét. $\Rightarrow 8 + c = 6$ (1 pont)
Tehát $\boldsymbol{c = -2}$. (1 pont)

c) Mivel az x^2 együtthatója negatív $(a = -2)$, így a parabola negatív állású, tehát $f(x)$ tart a $-\infty$-be. (1 pont)
Tehát **nincs megoldás**, mivel c paramétertől függetlenül a függvénynek mindig van negatív függvényértéke. (2 pont)

d) Helyettesítsünk be a parabola egyenletébe a koordináták helyére!
$\Rightarrow -2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + c = 2$ (1 pont)
$\Rightarrow \boldsymbol{c = -4}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36

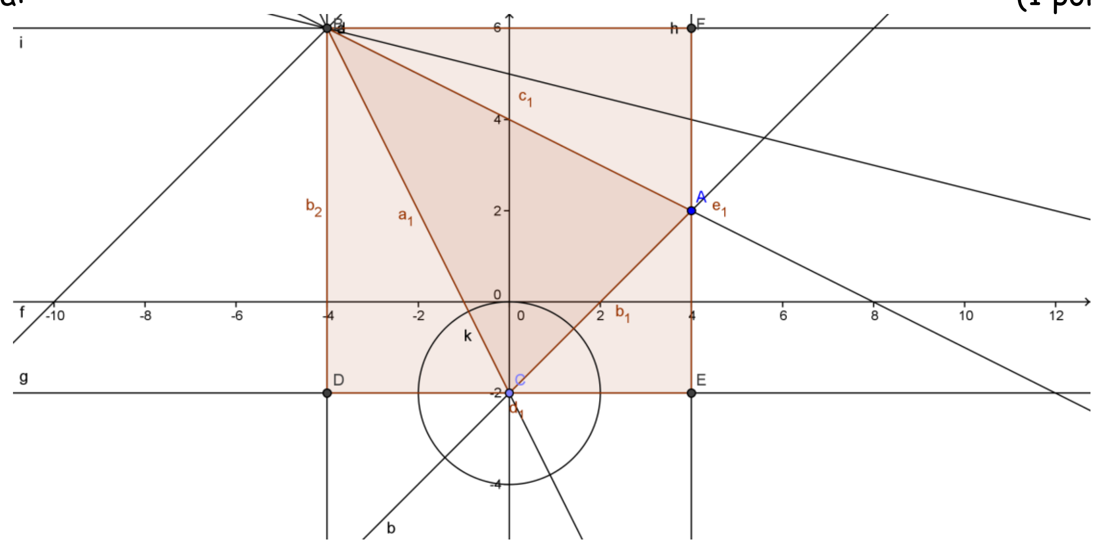
II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16) **Egy egyenlőszárú háromszögnek ismerjük egy csúcsának koordinátáit: $A(4;2)$. B csúcsa az $e: 4y + x = 20$ és az $f: x - y = -10$ egyenletű egyenesek metszéspontjában található, C csúcsa pedig az $x^2 + (y+2)^2 = 4$ egyenletű kör középpontja.**

a) Számítsd ki a háromszög B és C csúcsának koordinátáit, valamint írd fel a háromszög oldalainak egyenletét! (9 pont)
b) Mekkora a háromszög területe? (4 pont)
c) Add meg a háromszög súlypontjának, valamint az $\overline{AB}$ oldal A-hoz közelebbi harmadolópontjának koordinátáit! (4 pont)

Megoldás:

a) Ábra: (1 pont)



B csúcs koordinátáit úgy kapjuk meg, hogyha az e és f egyenesek egyenletei által képzett egyenletrendszert megoldjuk:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} e: 4y + x &= 20 \\ f: x - y &= -10 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Vonjuk ki az e egyenes egyenletéből az f egyenes egyenletét!

$\Rightarrow\ 5y = 30 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x - 6 = -10 \Rightarrow x = -4$

Tehát a háromszög B csúcsának koordinátái: $\boldsymbol{B(-4;6)}$ (2 pont)

C csúcs koordinátáit leolvashatjuk a kör egyenletéből $\Rightarrow \boldsymbol{C(0;-2)}$ (1 pont)

Mivel mindhárom csúcspont koordinátái ismertek, ezért használjuk a két ponton átmenő egyenes egyenletét: $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$ (1 pont)

$\overline{AB}$ oldal $\Rightarrow (x-4)(6-2) = (y-2)(-4-4)\ \Rightarrow\ \overline{AB}:\ \boldsymbol{x + 2y = 8}$ (1 pont)

$\overline{AC}$ oldal $\Rightarrow (x-4)(-2-2) = (y-2)(0-4)\ \Rightarrow\ \overline{AC}:\ \boldsymbol{x - y = 2}$ (1 pont)

$\overline{BC}$ oldal $\Rightarrow (x+4)(-2-6) = (y-6)[0-(-4)]\ \Rightarrow\ \overline{BC}:\ \boldsymbol{y + 2x = -2}$ (1 pont)

b) Foglaljuk négyzetbe a háromszöget az ábrán látható módon!

Így a négyzet területéből kivonva a 3 derékszögű háromszög területét, megkapjuk ABC háromszög területét!

A négyzet területe:

$$T_{BDEF} = 8 \cdot 8 = 64$$ (1 pont)

A háromszögek területei:

$$T_{BCD} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

$$T_{ACE} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$T_{AFB} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$ (1 pont)

$\Rightarrow T_{ABC} = 64 - 16 - 8 - 16 = \mathbf{24}$ **egységnégyzet** (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

c) A súlypont koordinátái az alábbi egyenletbe való behelyettesítéssel kaphatóak meg: $S\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ (1 pont)

Behelyettesítve $S\left(\frac{4+(-4)+0}{3};\frac{2+6+(-2)}{3}\right)=\boldsymbol{S(0;2)}$ (1 pont)

A-hoz közelebbi harmadolópont koordinátáit az alábbi képlet adja meg:

$H_A\left(\frac{2x_A+x_B}{3};\frac{2y_A+y_B}{3}\right)$ (1 pont)

Behelyettesítve $H_A\left(\frac{2\cdot 4+(-4)}{3};\frac{2\cdot 2+6}{3}\right)=\boldsymbol{H_A\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Egy állatmenhelyen 15 kutya és 20 macska van. Véletlenszerűen kiválasztunk közülük 8-at. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak között… (Az eredményeket normál alakban add meg!)

a) csak kutyát találunk? (3 pont)

b) 5 kutyát és 3 macskát találunk? (4 pont)

c) több kutyát találunk? (5 pont)

d) legalább 6 macskát találunk? (5 pont)

<u>Megoldás</u>:

Valószínűség $(P)=\frac{\text{kedvez ő eset}}{\text{összes eset}}$. Az összes eset mindegyik részben $\binom{35}{8}$, hiszen 35 állat közül választunk ki 8-at.

a) $P=\frac{\binom{15}{8}}{\binom{35}{8}}\approx \mathbf{2{,}73\cdot 10^{-4}}$ (2 +1 pont)

b) $P=\frac{\binom{15}{5}\binom{20}{3}}{\binom{35}{8}}\approx \mathbf{1{,}45\cdot 10^{-1}}$ (3 +1 pont)

c) A kedvező esetekhez tartozik, amikor 5,6,7, illetve 8 kutyát választunk ki.

$P=\frac{\binom{15}{5}\binom{20}{3}+\binom{15}{6}\binom{20}{2}+\binom{15}{7}\binom{20}{1}+\binom{15}{8}}{\binom{35}{8}}\approx \mathbf{1{,}92\cdot 10^{-1}}$ (4 +1 pont)

d) $P=\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{6}+\binom{15}{1}\binom{20}{7}+\binom{20}{8}}{\binom{35}{8}}\approx \mathbf{2{,}28\cdot 10^{-1}}$ (4 +1 pont)

(A +1 pont mindenhol a szöveges választ jelöli.)

Összesen: 17 pont

18) Megtakarítási céllal, Kriszti 600 000 Ft-ot helyezett el a bankban. Ez a megtakarítás a második év végére 655 200 Ft értékre növekedett.

a) Hány százalékos volt az éves kamat, ha az a két év során nem változott? (6 pont)

b) Hány százalékos volt a kamatláb a második évben, ha az egy százalékkal volt magasabb, mint az előző évben? (7 pont)

c) Ha az infláció (a pénz értékének romlása) átlagos évi mértéke ebben a két évben 6% volt, akkor mennyit ért a 655 200 Ft két évvel korábban? (4 pont)

Megoldás:

a) Legyen az éves kamat x %.

$$600000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=655200$$ (3 pont)

$\boldsymbol{x \approx 4{,}5\%}$ (2 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

b) Legyen a második éves kamatláb x %.

$$600000\left(1+\frac{x-1}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=655200$$ (3 pont)

$\boldsymbol{x = 5\%}$ (3 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

c) Legyen a keresett érték x forint.

$x\cdot 0{,}94^2=655200$ (2 pont)

$\boldsymbol{x \approx 741512}$ **Ft** (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100