2. csoport, 8. tétel: Gráfok

Összeállította: Tar Dóri és Ocztos Panna

Utolsó javítás: 2009. február 16.

Áttekintés

Akik biztos hozzájárultak a gráfelmélet kialakulásához

- Leonhard Euler (1707–1783) svájci matematikus és fizikus, a matematikatörténet egyik legtermékenyebb és legjelentősebb alakja.
- Henry Beck (1903–1974) angol mérnök, a londoni metró térkép tervezője.
- Lovász László (1948. március 9.–) magyar matematikus, az MTA tagja.

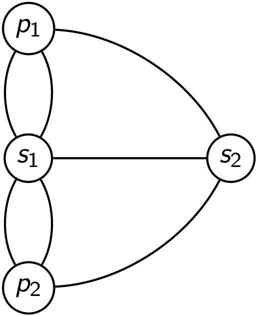
Euler és a gráfelmélet

A kelet-poroszországi Königsberg városa (ma Kalinyingrád) a Pregel-folyó két partján terül el. A folyóban két sziget található, amelyeket egymással és a két parttal hidak kötnek össze.

A königsbergi polgároktól származhat a kérdés: van-e olyan útvonal, amelyen végigsétálva valamennyi hidat útba ejthetik, de mindegyiket pontosan egyszer.

1735-ben Euler oldotta meg a problémát. Felismerte, hogy a szigetek és hidak pontos elhelyezkedése a feladat szempontjából közömbös. Egyedül az számít, milyen módon kötik össze a hidak a szigeteket és a partokat.

Königsbergi hidak



A königsbergiek probléma „gráfja" és egy műholdas fotó a szigetekről. A hét híd közül ma már csak öt létezik, de a képen a másik kettő helyét is megjelöltük.

Beck és a gráfelmélet

„A londoni metróhálózat következő ábrán látható térképét először 1931-ben vetette papírra Henry C. Beck, a *London Underground Group* huszonkilenc éves alkalmazottja.

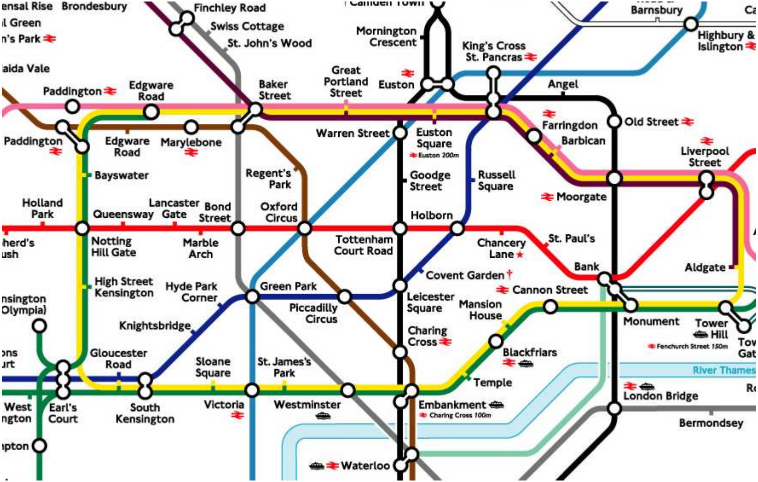
Beck két éven át győzködte elöljáróit, amíg művével – amelyet manapság mindenki ismer – a nyilvánosság elé léphetett.

A vállalat óvatos duhajként eleinte csak néhány példánnyal tett kísérletet, abban a meggyőződésben, hogy a térképnek, amely a valódi földrajzi viszonyokat semmibe veszi, nem lehet más a sorsa, csak közönyös elutasítás.

Tévedtek.

A londoni utazóközönség rövid időn belül megkedvelte, s a nagyméretű változat egy év múlva ott díszelgett valamennyi metróállomáson.”

Londoni metrótérkép



Gráfok és informatika

Az informatika és a gráfelmélet kapcsolata kétirányú.

Egyrészt az algoritmusok tervezésekor erősen támaszkodunk gráfelméleti ismeretekre, másrészt a számítógépek elterjedése lehetővé tette olyan méretű gráfok tanulmányozását, amelyek ''kézzel'' kezelhetetlenek lennének.

A négyszín-sejtés volt az első nevezetes matematikai sejtés, amit számítógép használatával sikerült bebizonyítani. Ez sok vitát váltott ki, hiszen lehetséges, hogy a programban, a számítógép hardverében, a fordítóprogramban stb. hiba van, amiről nem tudunk.

Lovász László és a gráfelmélet

1979-ben jelent meg a *Combinatorial Problems and Exercises* (Kombinatorikai problémák és feladatok), amely a mai napig alapmű gráfelmélet és kombinatorika témában.

A gráfelmélet eredményei alapvetőek informatikai algoritmusok tervezésekor. Lovász László 1999 és 2006 között a Microsoft egyik kutatóintézetét vezette.

Gráf

Sok problémát modellezhetünk úgy, hogy bizonyos „objektumok" közötti kapcsolatokat kell vizsgálnunk, de nem érdekel pontosan az objektumok mibenléte, inkább a kapcsolatok szerkezetére koncentrálunk.

Az ilyen problémák kezelésére vezették be a gráf fogalmát:

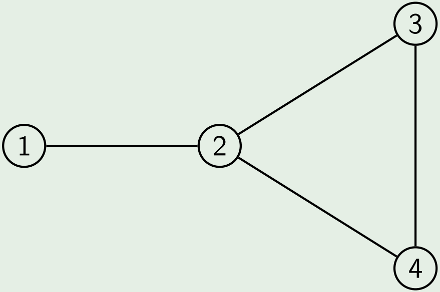
A gráf fogalma

A $G = (V, E)$ gráf csúcsok egy V halmazával és a csúcsok közötti élek E halmazával adható meg.

Példák gráfokra

Példa egy egyszerű gráfra

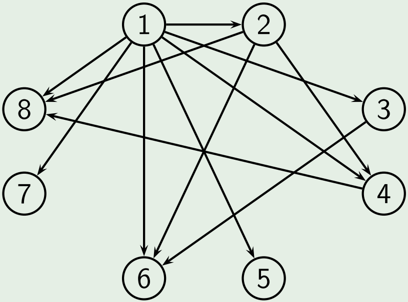
$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$



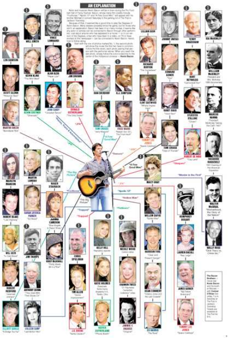
Példák gráfokra: oszthatósági gráf

A gráf csúcsai természetes számok. Az a csúcsból akkor megy él b-be, ha $a \mid b$ (és $a \neq b$).

Oszthatósági gráf



Kevin Bacon játék: a gráf csúcsai színészek, két csúcs között akkor megy él, ha a két színész játszott közös filmben.

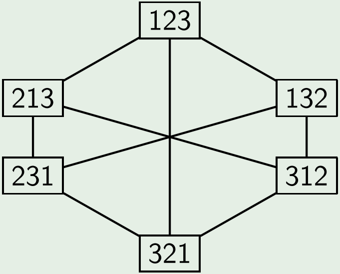


A játék arról szól, hogy ebben a gráfban keressük meg a legrövidebb utat egy tetszőleges színész és Kevin Bacon között.

Példák gráfokra: permutációk

A gráf csúcsai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz permutációi. Két csúcs között akkor megy él, ha a két permutáció egymásba vihető két elem felcserélésével.

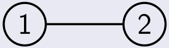
Permutációk és cserék



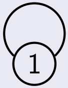
Élek

Egy gráf élei többfélék lehetnek:

Egyszerű

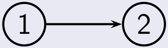


Hurok



Többszörös

Irányított



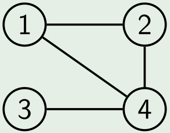
Egyszerű gráf

Az egyszerű gráf

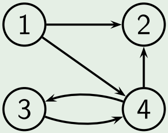
Egy gráfot egyszerű gráfnak nevezünk, ha pontjainak és éleinek halmaza véges, továbbá a gráfon nincs se hurok se többszörös él.

Ha a gráf irányított, akkor két csúcs között mindkét irányban mehet él, ez nem számít többszörös élnek.

Irányítatlan gráf



Irányított gráf



Fokszám tételek

Csúcs fokszáma

Egy gráf egy csúcsának fokszáma a csúcsból induló élek száma. Ha egy csúcsból nem indul él, azt a pontot izoláltnak nevezzük, fokszáma 0.

Tételek irányítatlan egyszerű gráfokra:

1. A fokszámösszeg minden gráfban az élek számának kétszerese.
2. A fokszámösszege mindig páros.
3. A páratlan fokú pontok száma páros.

A fokszám tételek bizonyítása

1. A fokszámösszeg minden gráfban az élek számának kétszerese.
   Bizonyítás: Minden él pontosan két csúcsot köt össze, tehát két fokszám értékhez ad hozzá egyet-egyet.
2. A fokszámösszege mindig páros.
   Bizonyítás: Az élek számának kétszerese páros.
3. A páratlan fokú pontok száma páros.
   Bizonyítás: Csak úgy lehet páros az összeg, ha páros sok páratlan tag van.

Gráf konstrukciója a fokszámok sorozatából

Az eddigiek alapján annyit állíthatunk, hogy egy számsorozat akkor lehet egyszerű gráf fokszámsorozata, ha a számok összege páros. Ez csak szükséges, de nem elégséges feltétele megfelelő egyszerű gráf létezésének.

Bizonyítás nélkül közöljük az egyik szükséges és elégséges feltételt:

Tétel

Nemnegatív egészek $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ sorozata akkor és csak akkor lehet egyszerű gráf fokszámsorozata, ha

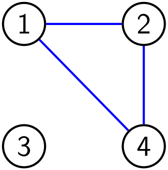
1. $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ páros és
2. $\forall 1 \leq k \leq n$ esetén $\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{n} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=1}^{n-k} \min(d_i, k)$

Gráf komplementere

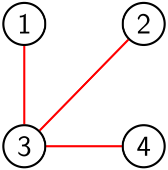
Komplementer

Egy G gráf komplementere az a $\overline{G}$ gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és pontosan azon csúcsai között van él, amelyek között G-ben nincs.

G:



$\overline{G}$:



Gráfok izomorfiája

Meg kell fogalmaznunk, mikor tekintünk két gráfot azonosnak.

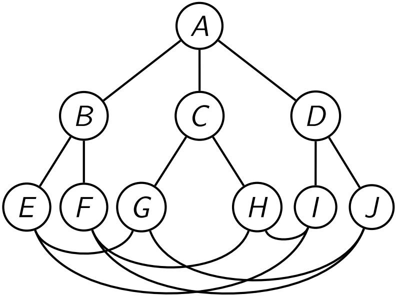
Gráfok izomorfiája

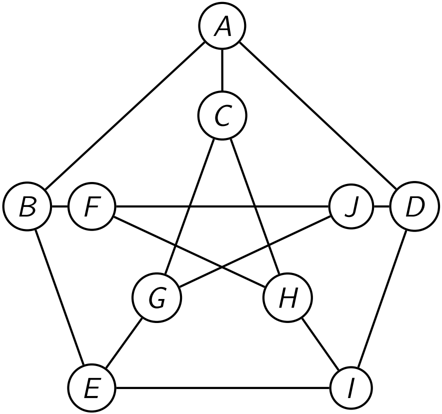
A G_1 és G_2 gráfok izomorfak (jele: $G_1 \cong G_2$), ha létezik G_1 és G_2 csúcsai között egy olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amire a G_1 gráf u és v csúcsa pontosan akkor van éllel összekötve G_1-ben, amikor a nekik megfelelő u' és v' csúcsokat G_2-ben él köti össze.

Az izomorfia eldöntésére nem ismert hatékony algoritmus.

A következő ábrán két izomorf gráfot láthatunk.

A Petersen-gráf kétféle ábrázolása





Séta, út, kör

Definíció

Egy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ csúcs-sorozat és $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élsorozat séta a G gráfban, ha e_i végpontjai v_{i-1} és v_i.

Definíció

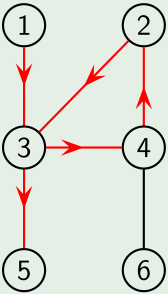
Az út olyan séta, amelyben a csúcsok között nincs ismétlődés.

Definíció

A kör olyan séta, amelyben $v_0 = v_k$, és több ismétlődés nincs a csúcsok között.

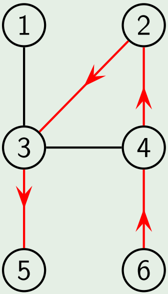
Példák sétára, útra, körre

Séta



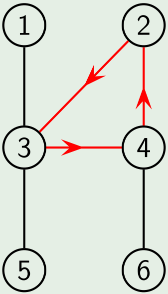
$1, 3, 4, 2, 3, 5$

Út



$6, 4, 2, 3, 5$

Kör



$4, 2, 3, 4$

Összefüggőség

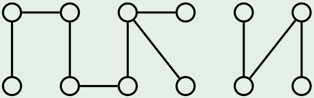
Definíció

A G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út.

Definíció

A G gráf összefüggő részgráfjait a G komponenseinek nevezzük.

Két komponensű gráf



Az összefüggő komponensek feltérképezése: gráfbejárások

Egy gráf összefüggő komponenseinek feltárására gráfbejárásokat használhatunk.

A gráfbejáró algoritmusok a gráf valamelyik csúcsából indulnak, és valamilyen stratégia szerint sorra veszik a csúcsból elérhető további csúcsokat.

A két leggyakrabban használt stratégia:

1. szélességi bejárás
2. mélységi bejárás

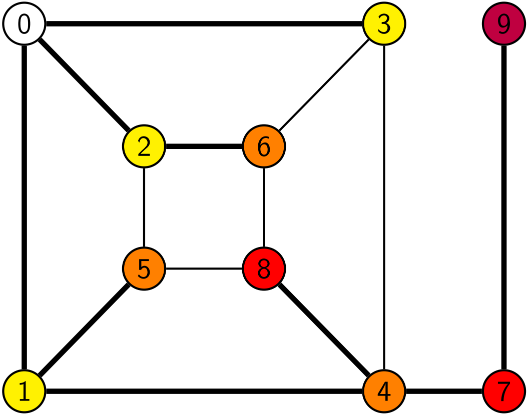
Szélességi bejárás

Szélességi bejárás, angolul BFS (Breadth First Search).

Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán ezen szomszédok összes olyan szomszédját, hol még nem jártunk, és így tovább.

Az összefüggő komponens csúcsait így a kezdőponttól vett távolságuk szerinti sorrendben találjuk meg.

Példa szélességi bejárásra

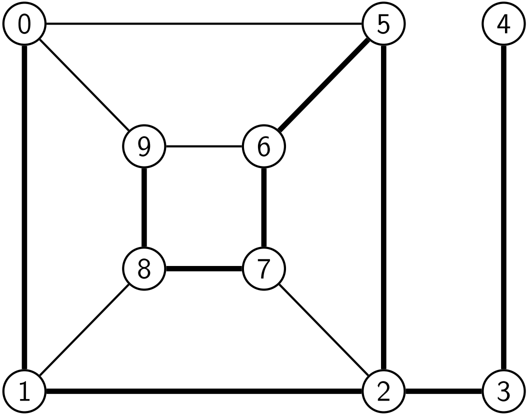


Mélységi bejárás

Mélységi bejárás, angolul DFS (Depth First Search).

Addig megyünk előre, amíg csak lehet. Ha zsákutcába értünk, visszalépünk a legközelebbi olyan csúcsig, ahonnan mehetünk másfelé, mint eddig.

Példa mélységi bejárásra

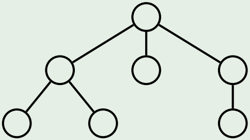


A fagráf fogalma

Definíció

Az összefüggő és körmentes gráfot fagráfnak vagy röviden fának nevezzük.

Példa fagráfra



Fák tulajdonságai

Egyszerűen bizonyíthatók a fagráfok következő tulajdonságai:

1. Egy legalább két csúcsú fában mindig van elsőfokú pont.
2. Egy legalább két csúcsú fában mindig van legalább két elsőfokú pont.
3. Egy n-csúcsú fának $n-1$ éle van.
4. Egy fa bármely két csúcsa között pontosan egy út vezet a gráfban.

Fák tulajdonságai – bizonyítások

Tétel

Egy legalább két csúcsú fában mindig van elsőfokú pont.

Bizonyítás: Induljunk el egy v_1 csúcsból. Mivel a gráfnak legalább két csúcsa van, v_1-ből indul él, mondjuk v_2-be. Ha több él nem indul v_2-ből, akkor ő elsőfokú és kész vagyunk. Ha indul, akkor mondjuk v_3-ba megy. Most vagy v_3 elsőfokú, vagy indul belőle még él, mondjuk v_4-be. (...)

Így újabb és újabb v_i csúcsokat kapunk, akikből a korábbi v_j csúcsokba nem mehet él, mert akkor kör lenne a gráfban. De a gráf véges, tehát előbb-utóbb le kell állnia az eljárásnak, ez pedig egy elsőfokú csúcsba érkezve történhet meg.

Fák tulajdonságai – bizonyítások

Tétel

Egy legalább két csúcsú fában mindig van legalább két elsőfokú pont.

Bizonyítás: Legyen a gráfban az egyik *leghosszabb út* csúcsainak sorozata $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Az út végpontjai biztosan elsőfokú csúcsok, hiszen ha indulna belőlük az út élétől különböző él, akkor az vagy egy hosszabb utat hozna létre, ami nem lehet, vagy az út belső pontjába vezetne, de ez sem lehet, hiszen a gráf körmentes.

Fák tulajdonságai – bizonyítások

Tétel

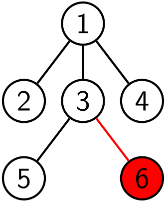
Egy n-csúcsú fának $n-1$ éle van.

Bizonyítás: („Favágással.”) A gráfban van elsőfokú csúcs. Vágjuk le, a belőle induló éllel együtt. Ezzel nem hoztunk létre kört, és nem vágtuk el a fát, továbbra is körmentes és összefüggő, tehát továbbra is fa.

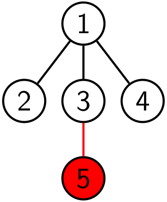
Ismételjük az előző lépést, amíg lehet. Mindig egy csúcs és egy él tűnik el egy lépésben. Végül egyetlen csúcs marad. Tehát eggyel kevesebb él van, mint csúcs.

A favágós bizonyítás képekben

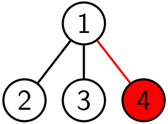
1.)



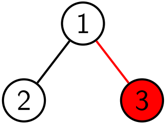
2.)



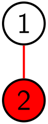
3.)



4.)



5.)



6.)

Fák tulajdonságai – bizonyítások

Tétel

Egy fa bármely két csúcsa között pontosan egy út vezet a gráfban.

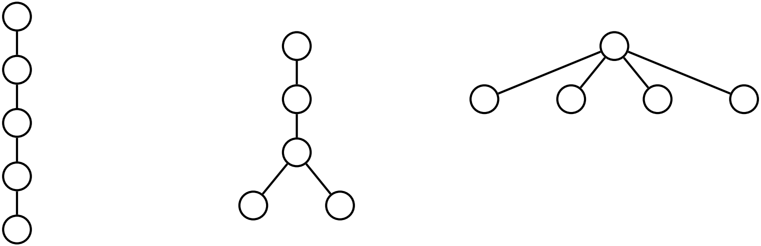
Bizonyítás: Indirekt. Ha x és y között két út is vezetne, akkor azok (x-ből indulva) legkésőbb y-ban találkoznának, így kör keletkezne, de a gráf körmentes, tehát nem lehet két út.

Egy út a gráf definíciója miatt létezik.

Fák felsorolása

Nem ismert zárt formula az n csúcson megadható fagráfok számára. Ezzel együtt „kis" n-re „kézzel" előállíthatjuk az összes különböző n-csúcsú fát.

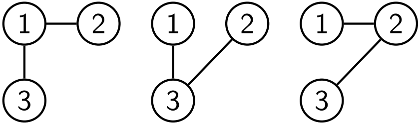
Például $n = 5$ esetén három különböző fa létezik:



Fák felsorolása

Ha a gráf csúcsait megkülönböztetjük (címkézzük), akkor már meg tudjuk mondani, hány különböző fa rajzolható.

Például $n = 3$ esetén 3 címkézett fa van:



Persze ebben az esetben sokkal nagyobb számot kapunk. A megszámlálása alapja a címkézett fák Prüfer-kódja

Prüfer-kód

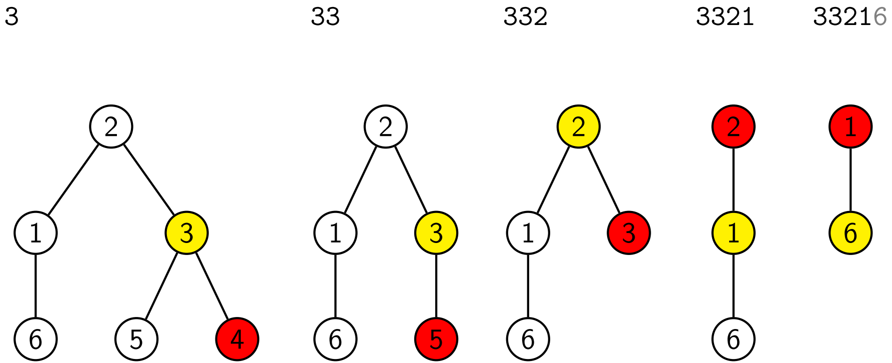
Egy n-csúcsú címkézett fához egy $n-2$ hosszú számsorozatot rendelhetünk, a következő módon:

Hagyjuk el a legkisebb címkéjű elsőfokú csúcsot (mindig van legalább 2, ha $n \geq 2$), és írjuk fel annak a csúcsnak a címkéjét, amihez csatlakozott. (Természetesen a csúcs törlésekor a belőle induló él is törlődik.)

Ismételjük az eljárát, amíg egyetlen csúcs marad.

Mivel mindig van legalább két elsőfokú csúcs $n \geq 2$ esetén, ezért a legnagyobb címkéjű csúcsot soha nem fogjuk törölni, tehát a kód $(n-1)$. eleme n lenne. Ezt felesleges felírni, ezért az $(n-2)$. címkénél befejezzük a Prüfer-kódot.

Példa Prüfer-kód előállítására



A hatost már nem írjuk le, a fa Prüfer-kódja: 3321

Fa felépítése a Prüfer-kód alapján

A Prüfer-kód elemeit jelölje $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$, és most írjuk fel a kód végére n-et is b_{n-1}-nek.

Legyen a_k az a csúcs, aminek törlésekor b_k-t feljegyeztük. Elég az a_k értékeket meghatározni, hiszen akkor a fa élei: $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{n-1}, b_{n-1})$.

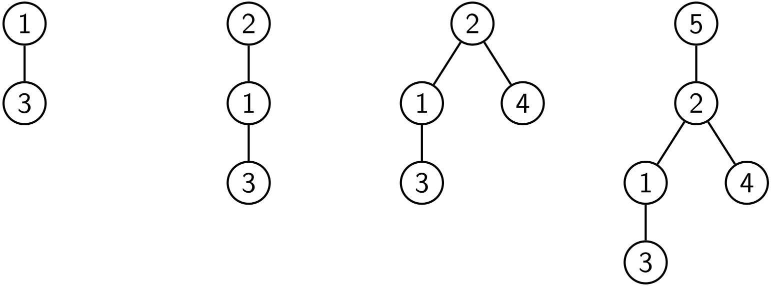
Bizonyítható, hogy a_k a legkisebb szám, ami nem fordul elő az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n-1}$ számok között.

Innen a fa felépíthető.

Fa felépítése a Prüfer-kód alapján

Legyen az 5-csúcsú gráf Prüfer-kódja 122. A kiegészített 1225 kóddal dolgozunk:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$



Cayley-tétel

Cayley tétele

Az n címkézett csúcson megadható fagráfok száma n^{n-2}.

Bizonyítás: A címkézett fák Prüfer-kódja egy $n-2$ hosszú sorozat, amelynek minden eleme n-féle lehet.

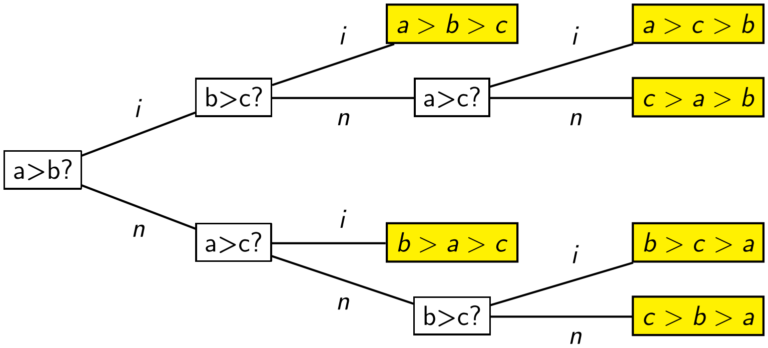
A címkézett fák és a Prüfer-kódok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, ezért a címkézett fák száma n csúcson n^{n-2}.

Döntési fák

Az informatikai algoritmusok nagy része modellezhető fagráfokkal. A gráf csúcsai a döntési helyzeteknek megfelelő állapotok, és azokba a csúcsokba vezet él, amely csúcsoknak megfelelő állapotokba juthatunk a döntési helyzetből.

Döntési fák

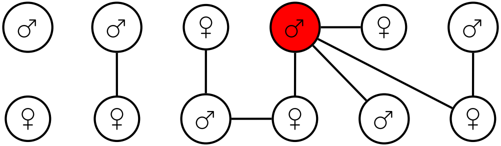
Három változó sorbarendezése döntési fával:



Szociális hálózatok

Különböző vírusos megbetegedések, például az AIDS és más nemi betegségek terjedésének elemzésekor fontos lehet a betegséget terjesztő „emberi hálózat” szerkezetének ismerete.

Más hálózatokhoz hasonlóan itt is azt találjuk, hogy a betegség terjesztésében azoknak van kiemelt szerepe, akik sok kapcsolattal rendelkeznek.



Internet

Az Internet is egy hatalmas gráf, ahol a forgalomirányító csomópontokat (routerek) tekinthetjük a gráf csúcsainak, és a gráf élei a routerek közötti közvetlen kapcsolatok.

Az hálózati réteg legfontosabb feladat a forgalomirányítás, ami akkor végezhető hatékonyan, ha a gráfban meg tudjuk határozni két csúcs között a legrövidebb utat.

Források

Katona Gyula Y. – Recski András
Bevezetés a véges matematikába
Egyetemi jegyzet, 1992

Hajnal Péter
Gráfelmélet
Polygon Kiadó Szeged, 1997

Keith Delvin
Matematika: a láthatatlan megjelenítése
Műszaki Kiadó, Typotex Kiadó, 2001

Lovász László
Kombinatorikai problémák és feladatok
Typotex Kiadó, 1999